URSP FMF 2026-01-08

Zadnji sklop govorili o kovarianci:

$$K(X,Y) = E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y))) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

za slučajni spremenljivki $X-E(X)$ in $Y-E(Y)$

4.) Iz Cauchy-Schwarzove neenakosti sledi, da če obstajata $D(X)$ in $D(Y)$, potem obstaja tudi kovarianca in velja

$$|K(X,Y)| \leq \sqrt{D(X)\cdot D(Y)} = \sigma(X)\cdot\sigma(Y).$$

Cauchy-Schwarz: $|E(U\cdot V)| \leq \sqrt{E(U^2)\cdot E(V^2)}$

enačaj velja $\Leftrightarrow$ $Y - E(Y) = \pm\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\cdot(X-E(X))$ z verjetnostjo 1

5.) Če X in Y imata disperzijo, potem jo ima tudi $X+Y$ in velja

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X,Y)$$

Če sta X in Y nekorelirani (posebej neodvisni), je

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Dokaz: sledi iz enakosti:

$$(X+Y-E(X+Y))^2 = ((X-E(X)) + (Y-E(Y)))^2 =$$

$$= (X-E(X))^2 + (Y-E(Y))^2 + 2\cdot(X-E(X))\cdot(Y-E(Y)),$$ če upoštevamo E na obeh straneh.

6.) Posplošitev na n slučajnih spremenljivk:

$$D(X_1+X_2+\cdots+X_n) = D(X_1)+\cdots+D(X_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} K(X_i,X_j)$$

če so $X_1,\dots,X_n$ parno nekorelirane (posebej neodvisne) je

$$D(X_1+\cdots+X_n) = D(X_1)+\cdots+D(X_n)$$

Spomnimo se: $(a_1+\cdots+a_n)^2 = a_1^2+\cdots+a_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i\cdot a_j$

Zgled: Let $X \sim Bin(n,p)$. Tedaj lahko X zapišemo kot vsoto $X_1+X_2+\cdots+X_n$, kjer so $X_i \sim Bern(p)$ neodvisni.

$\left(X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}\right)$, $(X_i = 1)$ je dogodek, da se v i-ti

ponovitvi poskusa zgodi dogodek A $(P(A)=p)$.

potem je $D(X)=D(X_1)+\dots+D(X_n)=n\cdot D(X_1)=n\cdot p\cdot q$, saj je

$D(X_1)=E(X_1^2)-(E(X_1))^2=p-p^2=p(1-p)=p\cdot q$. Torej je

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}$$

Def.: Standardizacija slučajne spremenljivke X je $X_S:=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ s nova obč. lastn.
slučajna spremenljivka
in biti neničelna, da $\exists X_S$.

za X_S velja $E(X_S)=\frac{1}{\sigma(X)}\cdot E(X-E(X))=0$,

$D(X_S)=\frac{1}{\sigma(X)^2}\cdot D(X-E(X))=\frac{1}{\sigma(X)^2}\cdot D(X)=1$

Zgled: $X\sim N(\mu,\sigma)$, $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$

$$X_S=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

Def.: Korelacijski koeficient sl. spr. X in Y je
število $r(X,Y)=\frac{E(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=E(X_S\cdot Y_S)$

Lastnosti r: 1.) $r(X,Y)=0\Leftrightarrow X$ in Y nekorelirani.

2.) sledi iz 4. lastnosti za kovarianco: $-1\le r(X,Y)\le 1$

3.) $r(X,Y)=1\Leftrightarrow\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X-E(X))+E(Y)=Y$ z verjetnostjo 1 $\Rightarrow$
med X in Y je linearna zveza

$r(X,Y)=-1\Leftrightarrow-\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X-E(X))+E(Y)=Y$ z verjetnostjo 1.

$\vee$ teh dveh primerih med X in Y obstaja
linearna zveza.

Zgled: Let $(X,Y)\sim N(\underset{\in\mathbb{R}}{\mu_X},\underset{\in\mathbb{R}}{\mu_Y},\underset{>0}{\sigma_X},\underset{>0}{\sigma_Y},\underset{\in(-1,1)}{\rho\neq 0})$.

Dokažimo, da je $r(X,Y)=\rho$

Lev fe $(X_s, Y_s) \sim N(0,0,1,1,\rho)$, fe ρ ro

$$r(X,Y) = E(X_s \cdot Y_s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot y \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot(x^2-2\rho xy+y^2)\right)$$

ro

$(x-\rho y)^2+(1-\rho^2)y^2$

$dx\,dy =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot e^{-y^2/2}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho\mu)^2}dx}_{E(N(\rho\mu,\sqrt{1-\rho^2}))}\,dy =$$

$N(\mu,\sigma)$:

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

$$= \rho\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2}dy}_{D(N(0,1))=1} = \rho$$

$\Leftrightarrow E(N(0,1)^2)=1$

Torej sta X in Y nekorelirani $\Leftrightarrow \rho = 0 \Rightarrow$ X in Y neodv.

Če je ρ blizu 1, sta X in Y stohastično linearno odvisni

za -1 pa

[11. Pogojna porazdelitev in pogojno matem. upanje]

Definicija:

Vzamimo dogodek B s $P(B)>0$.

Pogojna porazdelitvena fja sl. spr. X glede na pogoj B je $F_X(x|B) := P(X\le x|B) = \frac{P((X\le x)\cap B)}{P(B)}$, $x\in\mathbb{R}$

ima enake lastnosti kot porazdelitvena fja:

A.) Diskretni primer: Let (X,Y) diskretna porazdelitev:

$p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$

$p_i = P(X=x_i)$

$q_j = P(Y=y_j)$

Vzamimo $B=(Y=y_j)$ za fiksen j. Pogojna porazd. fja sl. spr. X glede na $(Y=y_j)$ je $F_X(x|Y=y_j) =$

$$= P(X\le x \mid Y=y_j) = \frac{P(X\le x, Y\le y_j)}{P(Y=y_j)} =$$

$= \frac{1}{q_j} \cdot \sum_{i: x_i \in X} p_{ij}$ | upeljimo še pogojno verjetnostno f-jo

$p_{i|j} := P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_i)}{P(Y = y_i)} = \frac{p_{ij}}{q_j}$

Tedaj je $F_X = \sum_{i: x_i \in X} p_{i|j}$

Pogojno mat. upanje sl. spr. X glede na pogoj $(Y = y_i)$

je mat. upanje za to porazd., t.j.:

$E(X \mid Y = y_j) = \sum_i x_i \cdot p_{i|j} = \frac{1}{q_j} \sum_i x_i p_{ij}$

$\varphi(y_j)$ ... (kaj smo imeli fiksen f.)

↳ to je regresijska f-ja definirana na zalogi vrednosti sl. sp. Y.

Pogojno mat. upanje sl. spr. X glede na sl. sp. Y je sl. sp. $E(X \mid Y) := \varphi(Y)$: $\begin{pmatrix} \varphi(y_1) & \varphi(y_2) & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix}$

zanjo velja $E(E(X,Y)) = \sum_j \varphi(y_j) \cdot q_j = \sum_j \sum_i x_i \, p_{ij} =$

$= \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{ij}}_{p_i} = \sum_i x_i p_i = E(X)$.

O.N. kaj bi bilo ob privzetku, da X, Y neodv. sl. sp.?

---

slike table predavanja so na http://splet.4a.si/dm/0108/